Freedom | คณิตศาสตร์ เพิ่มเติม

สอบปลายภาค 2 / 2567

By ไทเกอร์ มือเบสหน้าตาดีย์ จุ้บๆ

Ig : TorGor_XLT.09

คำเตือน

เนื้อหาทั้งหมดเป็นเนื้อหาที่สรุปเอง
เนื้อหามาจาก หนังสือ / สมุด / ชีท / ครู
สรุปนี้อาจมีข้อผิดพลาดได้

ONLINE PDF

poomp5.com/freedom

Matrix

การเขียน matrix

$$A = \begin{array}{cc} \text{หลัก 1} & \text{หลัก 2} \\ \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{แถว 1} \\ \text{แถว 2} \\ \text{แถว 3} \end{array}$$

นี่คือ Matrix ที่มีมิติ 3X2

มี 3 แถว 2 หลัก

$a_{11} = 1$ แถว 1 หลัก 1

$a_{12} = 2$ แถว 1 หลัก 2

$a_{21} = 3$

$a_{22} = 4$

$a_{31} = 5$

$a_{32} = 6$

Ex. โจทย์

$$a_{11} - 2a_{21} + a_{32} = ?$$

$$1 - 2(3) + 6 = ?$$

$$1 - 6 + 6 = \mathbf{11}$$

Matrix ที่ควรจำ

- Matrix จัตุรัส
- Matrix ศูนย์
- Matrix เอกลักษณ์

หน้า 54-55 จ่ะ

Ex. โจทย์การหาค่าตัวแปรจากสมาชิก

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2x-1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$2X - 1 = 6$$

$$2X = 7$$

$$X = 3.5$$

*ใช้เรื่องสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร from ม3

$$\begin{bmatrix} 2x-y \\ 3x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 16 \end{bmatrix}$$

ให้ $2x-y = -1$ เป็นสมการที่ 1

ให้ $3x+2y = 16$ เป็นสมการที่ 2

เลือกกำจัด y โดยการ x2 ตลอดสมการ 1 แล้วจึง + กัน

$$4x-2y = -2 \quad +$$

$$7x = 14$$

$$x = 2$$

แทนค่า x = 2 ใน สมการใดก็ได้

$$2(2) - y = -1$$

$$y = 5$$

การ +/- Matrix

การ +/- ต้องมี matrix มิติ เดียวกัน

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

หา A+B

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

บวกกันตัวต่อตัวเช่น a_{11} กับ b_{11}

$3 + 1 = 4$

$$\begin{bmatrix} 3+1 & 4+2 \\ 7+3 & 2+4 \\ 7+5 & 1+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 6 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$$

หา A-B

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

ลบกันตัวต่อตัวเช่น a_{11} กับ b_{11}

$3 - 1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 3-1 & 4-2 \\ 7-3 & 2-4 \\ 7-5 & 1-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

การคูณ Matrix ด้วยจำนวนจริง

Ex. หา 2A

$$2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

คูณกันตัวต่อตัวเช่น a_{11}

$2(3) = 6$

$$\begin{bmatrix} 3\text{x}2 & 4\text{x}2 \\ 7\text{x}2 & 2\text{x}2 \\ 7\text{x}2 & 1\text{x}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 14 & 4 \\ 14 & 2 \end{bmatrix}$$

ฟิวชั่น!!!

Ex. จงหา 2A - B

$$2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 14 & 4 \\ 14 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6-1 & 8-2 \\ 14-3 & 4-4 \\ 14-5 & 2-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 11 & 0 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}$$

Ver. โจทย์ปัญหา

:)	พลังงาน (กิโลแคลอรี่)	ไขมัน(กรัม)	โซเดียม (มิลลิกรัม)
ข้าวมันไก่ 1 จาน	600	7	1100
หมูทอด 1 ชิ้น	150	10	250
ลอดช่อง 1 ถ้วย	200	2	20

ถ้ากินข้าวมันไก่ 1 จาน หมูทอด 2 ชิ้น ลอดช่อง 2 ถ้วย
จะได้รับพลังงาน ไขมัน และ โซเดียม เท่าไหร่

ให้ A เป็น Matrix แสดง พลังงาน ไขมัน โซเดียม ของข้าวมันไก่
ให้ B เป็น Matrix แสดง พลังงาน ไขมัน โซเดียม ของหมูทอด
ให้ C เป็น Matrix แสดง พลังงาน ไขมัน โซเดียม ของลอดช่อง

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 600 & 7 & 1100 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{2B} = \begin{bmatrix} 300 & 20 & 500 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{2C} = \begin{bmatrix} 400 & 4 & 40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1300 & 31 & 1640 \end{bmatrix}$$

Ans :
ได้รับพลังงาน 1300 กิโลแคลลอรี่
ไขมัน 31 กรัม
โซเดียม 1640 มิลลิกรัม

การคูณ Matrix ด้วย Matrix

หลักของ Matrix ตัวหน้า จะต้องเท่ากับ แถวของ Matrix ตัวหลัง
แถวของ Matrix หน้ากับ หลักของ Matrix หลัง จะเป็นมิติของคำตอบ

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

หา AB

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

เช็กขนาด Matrix ก่อน

3 X 1 1 X 3

คูณกันได้ ✓

คำตอบจะเป็นมิติ 3X3

$$\begin{bmatrix} 3X1 & 3X3 & 3X5 \\ 2X1 & 2X3 & 2X5 \\ 1X1 & 1X3 & 1X5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 9 & 15 \\ 2 & 6 & 10 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

หา C^2

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3X3 + 5X2 & 3X5 + 5X4 \\ 2X3 + 4X2 & 2X5 + 4X4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 35 \\ 14 & 26 \end{bmatrix}$$

การคูณ Matrix 2x2 กับ 2x2
ดูได้ที่นิยามหน้า 60

การ Transpose Matrix

คือการเปลี่ยนแถวเป็นหลัก

หา C^t

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

หา $(AB)^t$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 9 & 15 \\ 2 & 6 & 10 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \\ 15 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

การหาค่า det ของ Matrix

แบบ Matrix 2X2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

คูณลง - คูณขึ้น

$= 1X4 - 3X2$

$= 4 - 6$

Ans : det(A)= -2

แบบ Matrix 3X3

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix}$$

เอาหลักมาต่อละ
คูณลง - คูณขึ้น

$= ((1x5x9) + 84 + 96) - (105 + 48 + 72)$

$\det(B) = 225 - 225$ **= 0**

การหาค่า Minor ของ Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ตัดแถว 1

ตัดหลัก 1

ตัดแถวตัดหลักตามโจทย์แล้ว
หาค่า det จากที่เหลือ

Ex. จงหา M_{11}

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5X9 - 8X6$$

$= 45 - 48$

M_{11} **= -3**

การหาค่า Cofactor ของ Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

จงหา $C_{11}(A)$

เอาแถว + หลัก

$$= (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

คูณลง - คูณขึ้น

$= 1 \times 5X9 - 8X6$ $\quad = 1 \times 45 - 48$

Ans : $C_{11}(A) = -3$

การหาค่า det โดยการกระจาย Cofactor

กระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวที่ 1 จะได้

$$\det(A) = (-1)^{1+1}a_{11}\overset{M_{11}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} + (-1)^{1+2}a_{12}\overset{M_{12}}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}} + (-1)^{1+3}a_{13}\overset{M_{13}}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}$$

กระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวที่ 2 จะได้

$$\det(A) = (-1)^{2+1}a_{21}\overset{M_{21}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} + (-1)^{2+2}a_{22}\overset{M_{22}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}} + (-1)^{2+3}a_{23}\overset{M_{23}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}$$

กระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวที่ 3 จะได้

$$\det(A) = (-1)^{3+1}a_{31}\overset{M_{31}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}} + (-1)^{3+2}a_{32}\overset{M_{32}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}} + (-1)^{3+3}a_{33}\overset{M_{33}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

*อันนี้กระจายตามแถว 1

สามารถกระจายตามหลักก็ได้

$$\det(A) = (-1)^{1+1} \times 1 \times \overset{5X9 - 8X6 = -3}{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}} + (-1)^{1+2} \times 2 \times \overset{4X9 - 7X6 = -6}{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}} + (-1)^{1+3} \times 3 \times \overset{4X8 - 7X5 = -3}{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}}$$

$$\det(A) = 1 \times -3 + -2 \times -6 + 3 \times -3$$

det(A) = 0

สมบัติของ det

6. $det(A^t) = det(A)$
7. $det(AB) = det(A)det(B)$
8. $det(A^n) = (det(A))^n$
9. $det(kA) = k^n det(A)$
10. $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$ เมื่อ $det(A) \neq 0$

***หลักๆที่ควรจำ**

Ex. ให้ det(A) = -2 det(B) = 5 (A & B เป็น 3X3)

หา det(AB)

จากสมบัติ 7.

$$-2 \times 5$$
$$= -10$$

หา det(-A)

จากสมบัติ 9.

det(-A) = det(-1A)

$$-1^3 \times -2$$
$$= -1 \times -2$$
$$= 2$$

หา det(A⁻¹B⁻¹)

จากสมบัติ 10. และ 7.

$$\frac{1}{-2} \times \frac{1}{5}$$
$$= -\frac{1}{10}$$

คนทำสรุปตอนนี้ :

การหา Matrix ผกผัน

แบบ Matrix 2X2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1X4 - 3X2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

*det(A) ≠ 0

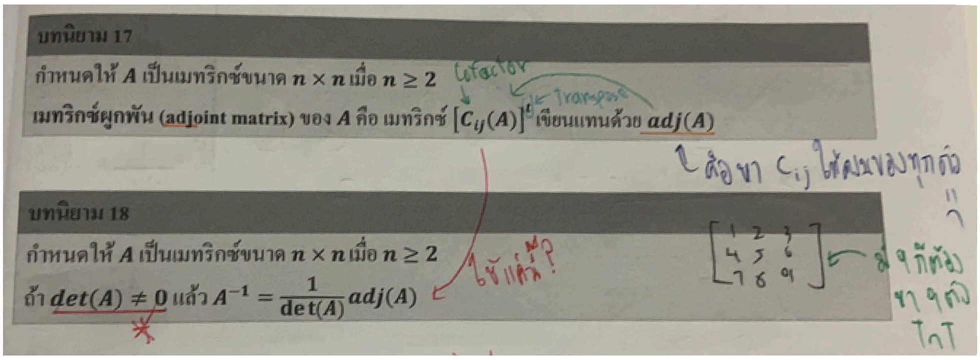
$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{-2} \end{bmatrix}$$

เตรียมเจอแบบ 3X3

คือมันเยอะแล้วใส่หน้านี้ไม่พอแล้ว เลยหาไรมาใส่เฉยๆ

แบบ Matrix 3X3 หรือ มากกว่านั้น


บทนิยาม 17

กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ เมื่อ $n \geq 2$

เมทริกซ์ผูกพัน (adjoint matrix) ของ A คือ เมทริกซ์ $[C_{ij}(A)]^t$ เขียนแทนด้วย $adj(A)$

บทนิยาม 18

กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ เมื่อ $n \geq 2$

ถ้า $det(A) \neq 0$ แล้ว $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

หา det(B) ก่อน

$= (0 + 40 + 0) - (15 + 24 + 0)$

$det(B) = 40 - 39 = 1$

สูตรลัด

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

หา adj(B) ต่อ

หา C_{11} $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$ $= -24$	**หา C_{12}** $-1 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$ $= 20$	**หา C_{13}** $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ $= -5$
หา C_{21} $-1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$ $= 18$	**หา C_{22}** $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$ $= -15$	**หา C_{23}** $-1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ $= 4$
หา C_{31} $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ $= 5$	**หา C_{32}** $-1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ $= -4$	**หา C_{33}** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $= 1$

หา adj(B) ต่อไป.......

$$= \begin{bmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}^{t}$$

$$\mathbf{adj(B)} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \times \mathrm{adj}(B)$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1} \times \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ถ้ามันเริ่มเบี้ยวๆคือคนทำง่วง

การใช้ Matrix แก้ระบบสมการเชิงเส้น

Ex.

$$x + y = 3$$
$$2x + 3y = 7$$

$\det(A) = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

จาก $X = A^{-1} \times B$

หา A^{-1} ก่อน

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

หาต่อ

จาก $X = A^{-1} \times B$

$$X = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 - 7 \\ -6 + 7 \end{bmatrix}$$

$X = 2 \quad y = 1$

จะจบแล้ว!!!

เอาแมวหมุนได้เป็นกำลังใจ

การใช้กฎของคราเมอร์แก้ระบบสมการเชิงเส้น

Ex.

$$x + y = 3$$
$$2x + 3y = 7$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

หา det(A)

$= 1X3 - 2X1$

$= 3 - 2 = 1$

แทนค่า B ลงไปในหลัก x

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

หา det(A_1)

$= 3X3 - 7X1$

$= 9 - 7 = 2$

แทนค่า B ลงไปในหลัก y

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

หา det(A_2)

$= 1X7 - 2X3$

$= 7 - 6 = 1$

จาก $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{1}{1} = 1$$

แบบ กฎของเกาส์ จอร์แดน

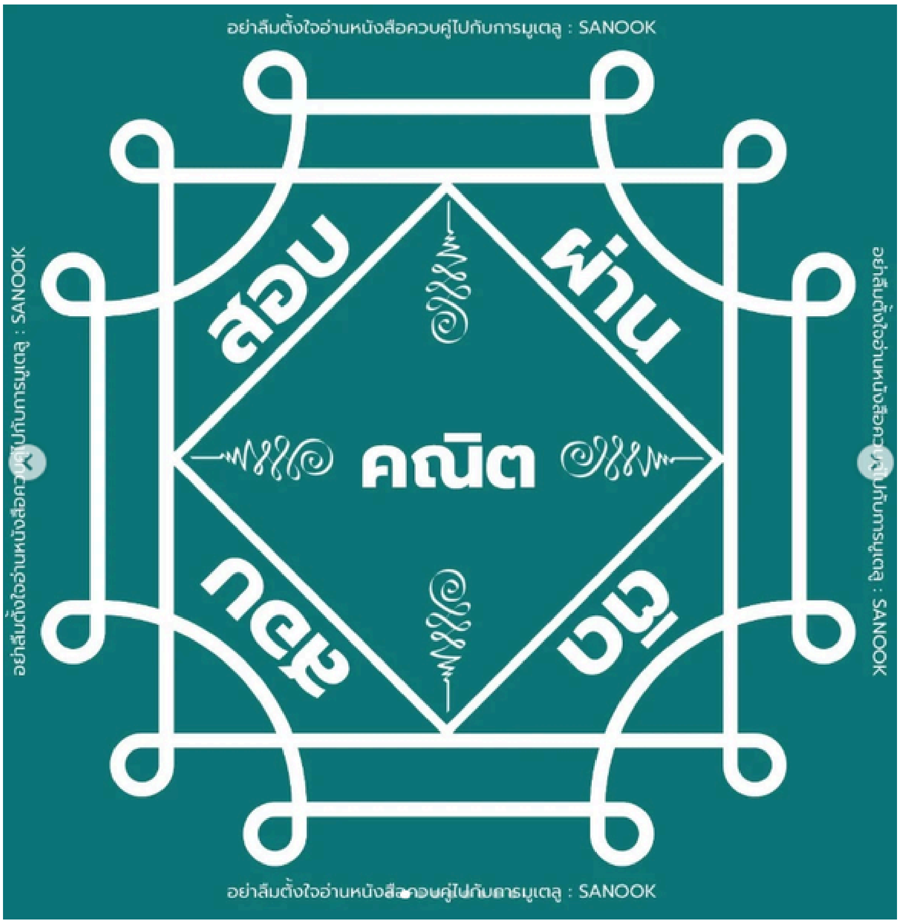
อ่านได้ที่หน้า 82 - 87

คือมันไม่น่าจะทำลง Canva ได้

จริงๆมันทำได้แค่ขี้เกียจ

PromptPay

ทำบุญทำทานหน่อยเด้อ


อย่าลืมตั้งใจอ่านหนังสือควบคู่ไปกับการมูเตลู : SANOOK
สอบ
ผ่าน
คณิต
อย่าลืมตั้งใจอ่านหนังสือควบคู่ไปกับการมูเตลู : SANOOK


มิสแจ๊สรถเสีย
แชร์แล้วสอบผ่าน


จะตั้งใจเรียนคณิตบ้าง
เพราะตั้งใจรักแล้วมันตกคณิต