

# Freedom | คณิตศาสตร์

สอบปลายภาค 1 / 2568

(สรุปผิดทัก IG : d3w4r\_zz)

ฟังค์ชัน

ท57พ

## คำเตือน

- เนื้อหาทั้งหมดเป็นเนื้อหาที่สรุปเอง
- เนื้อหาจาก หนังสือ / สมุด / ชีท / ครู
- สรุปนี้อาจมีข้อผิดพลาดได้



**FREEDOM**  
ASSUMPTION COLLEGE THONBURI



ONLINE PDF  
FREEDOM.POOMP5.COM



Freedom | true money  
wallet



Freedom | K+

# FUNCTION

คูณคาร์ทีเซียน

$A \times B$

เซตใน A คูณกับ B

สมมุติว่า  $A = \{1,2\}$   $B = \{3,4,5\}$

$A \times B = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$

$\{1, 2\}$   $\times$   $\{3, 4, 5\}$

เอาตัวแรกในเซต A ไปจับคู่กับเซต B เรียงไปที่ละตัว เรียงเป็นแบบ  $(x,y)$

เขียนแบบนอกเงื่อนไขได้  $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

ความสัมพันธ์น้อยกว่าจาก A ไป B

$\{(x,y) \in A \times B \mid x < y\}$

ความสัมพันธ์มากกว่าจาก A ไป B

$\{(x,y) \in A \times B \mid x > y\}$

ความสัมพันธ์กำลังสองจาก A ไป B

$\{(x,y) \in A \times B \mid x = y^2\}$

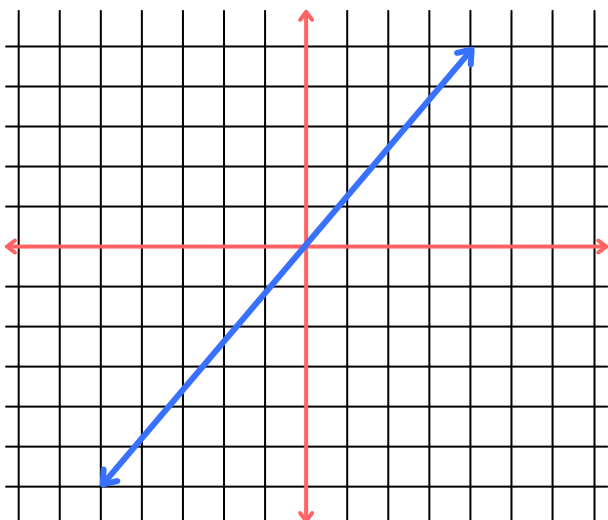
ความสัมพันธ์รากที่สองจาก A ไป B

$\{(x,y) \in A \times B \mid x = \sqrt{y}\}$

# GRAPH

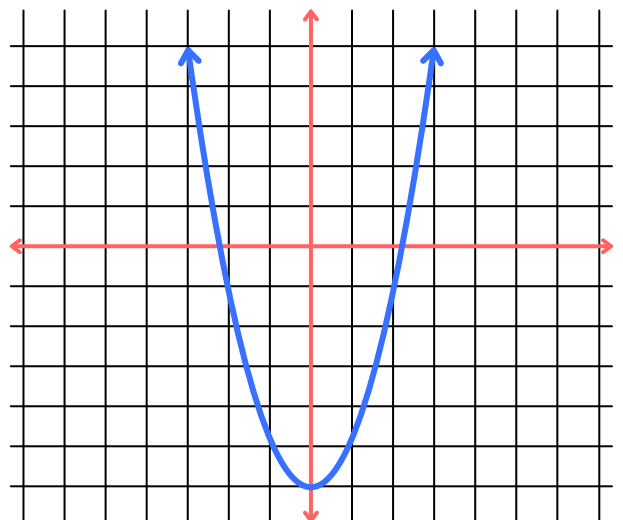
$$y = mx + b$$

เป็นสมการกราฟเส้นตรง



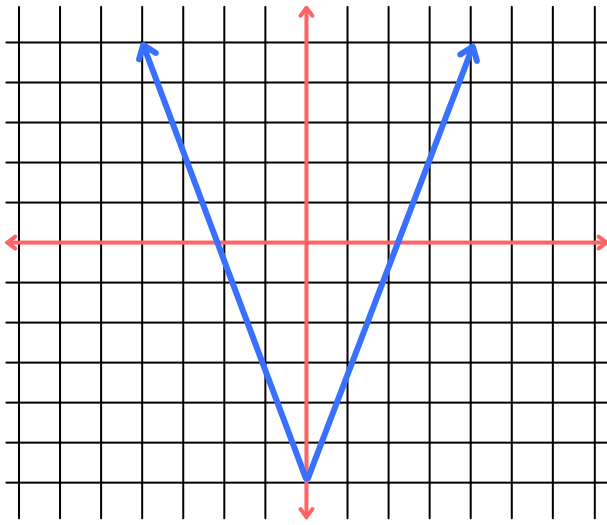
$$y = x^2$$

เป็นสมการกราฟพาราโบลา



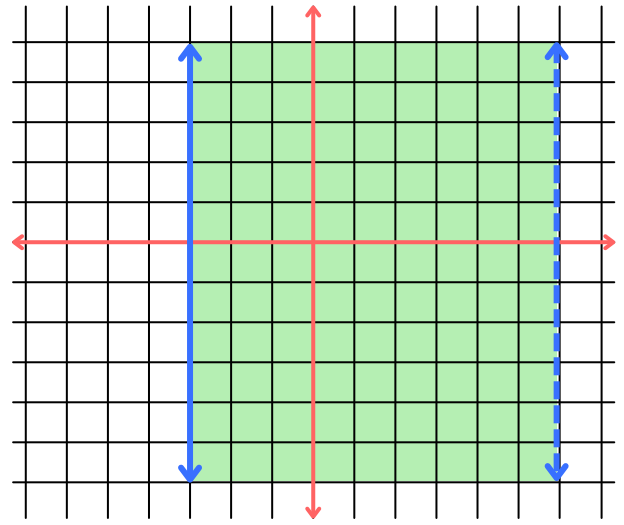
$$y = |x|$$

เป็นสมการกราฟค่าสัมบูรณ์



$$\mathbb{R} < x < \mathbb{R}$$

เป็นสมการกราฟสมการเชิงเส้น



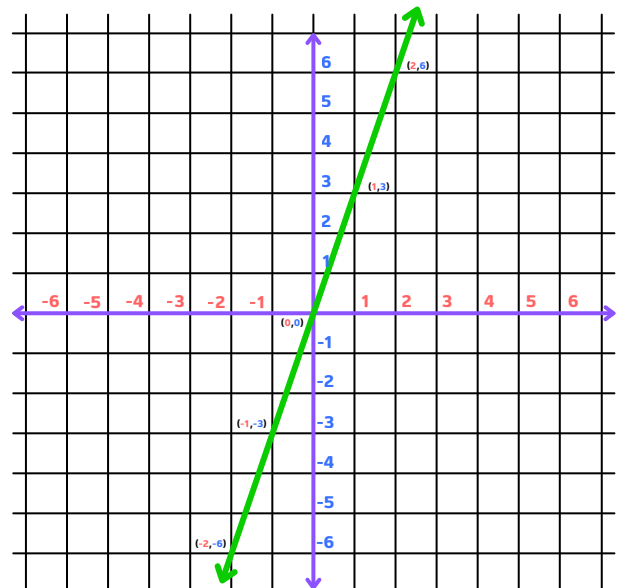
## กราฟเส้นตรง

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x\}$$

<b>x</b>	<b>-2</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
<b>y</b>	<b>-6</b>	<b>-3</b>	<b>0</b>	<b>3</b>	<b>6</b>

$$y = mx + b$$

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x\}$$



ให้ทำตารางแบบง่าย ๆ และแทนค่า **x** ใด ๆ

$$y = 3(-2) = -6, (-2, -6)$$

$$y = 3(-1) = -3, (-1, -3)$$

$$y = 3(0) = 0, (0, 0)$$

$$y = 3(1) = 3, (1, 3)$$

$$y = 3(2) = 6, (2, 6)$$

นี่แค่เริ่มต้นอย่า  
เพิ่งปิดสรุปนะ

ลองทำความเข้าใจ  
ไม่เห็นยากเลย

# กราฟพาราโบลา

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$$

<b>x</b>	-2	-1	0	1	2
<b>y</b>	4	1	0	1	4

ให้ทำตารางแบบง่ายๆ และแทนค่า **x** ดู

$$y = (-2)^2 = 4, (-2,4)$$

$$y = (-1)^2 = 1, (-1,1)$$

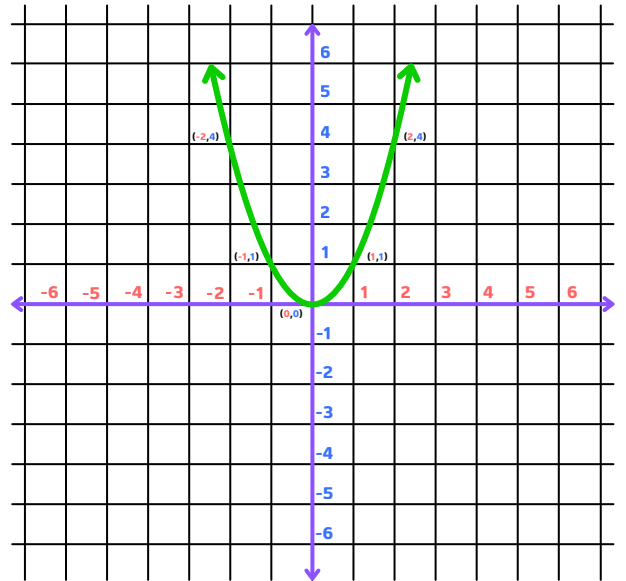
$$y = (0)^2 = 0, (0,0)$$

$$y = (1)^2 = 1, (1,1)$$

$$y = (2)^2 = 4, (2,4)$$

$$y = x^2$$

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$$



# สูตรพาราโบลา



$$y = ax^2 + bx + c$$



$$\left( \frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

$$y = ax^2$$



$$(0,0)$$

$$y = ax^2 + k$$



$$(0,k)$$

$$y = a(x - h)^2$$



$$(h,0)$$

$$y = a(x - h)^2 + k$$



$$(h,k)$$

สูตรแค่นี้ซิวกๆ จำ  
ได้ยุลละ สบายๆ

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - 3 = (x + 2)^2\}$$

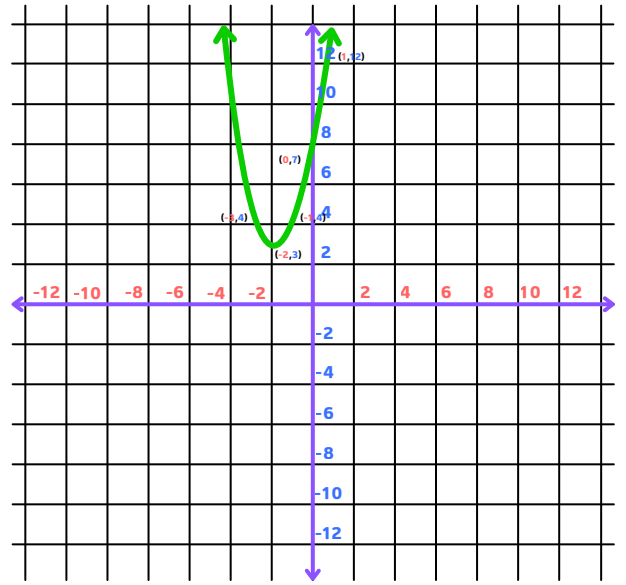
<b>x</b>	<b>-3</b>	<b>-2</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>y</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>7</b>	<b>12</b>

ให้ทำตารางแบบง่าย ๆ และ **แทนค่า x** ดู

$$\begin{aligned}
 y - 3 &= ((-3) + 2)^2 = 1 \\
 y &= 1 + 3 \\
 y &= 4
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} y - 3 &= ((-3) + 2)^2 = 1 \\ y &= 1 + 3 \\ y &= 4 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{แทนค่า } x \text{ แบบนี้ไป} \\ \text{เรื่อยๆ เหมือนใน} \\ \text{ตาราง} \end{array}$$

$$y = a(x-h)^2 + k$$

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - 3 = (x + 2)^2\}$$



$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x^2 + 2\}$$

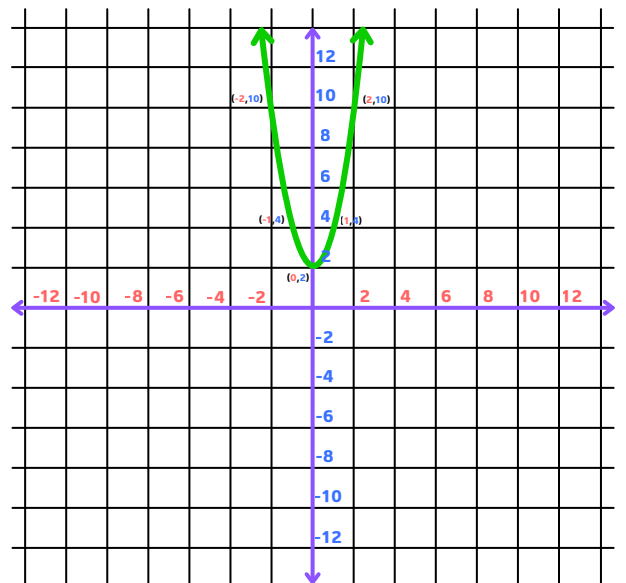
<b>x</b>	<b>-2</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
<b>y</b>	<b>10</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>10</b>

ให้ทำตารางแบบง่าย ๆ และ **แทนค่า x** ดู

$$\begin{aligned}
 y &= 2(-2)^2 + 2 = 10 \\
 y &= 10
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} y &= 2(-2)^2 + 2 = 10 \\ y &= 10 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{แทนค่า } x \text{ แบบนี้ไป} \\ \text{เรื่อยๆ เหมือนใน} \\ \text{ตาราง} \end{array}$$

$$y = ax^2 + k$$

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x^2 + 2\}$$



$$y = ax^2 + bx + c$$

สมมุติมีโจทย์  $y = x^2 - 4x + 3$

หา x ใช้สูตร :  $\left(\frac{-b}{2a}\right)$ , b คือ -4, a คือ 1

$$\text{แทนค่า : } \left(\frac{-(-4)}{2(1)}\right) = \frac{-(-4)}{2} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore x = 2$$

หา y ให้แทน x ไปในสูตร :  $y = 2^2 - 4(2) + 3$   
 $y = 4 - 8 + 3$

$$\therefore y = -1 \quad \therefore \text{จุดต่ำสุดที่ } (2, -1)$$

สมมุติมีโจทย์  $y = -4x^2 + 12x - 9$

หา x ใช้สูตร :  $\left(\frac{-b}{2a}\right)$ , b คือ 12, a คือ -4

$$\text{แทนค่า : } \left(\frac{-(-12)}{2(-4)}\right) = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}$$

หา y ให้แทน x ไปในสูตร :  $y = -4\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{3}{2}\right) - 9$   
 $y = 0$

$$\therefore y = 0 \quad \therefore \text{จุดสูงสุดที่ } \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

สามารถเขียน  $y = ax^2 + bx + c$  ให้เป็น  $y = a(x-h)^2 + k$  ถ้า  $a$  ไม่เท่ากับ 0

ต้องจัดใช้กำลังสองสมบูรณ์

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$y = x^2 + 6x + 8$$

$$y = x^2 + 2(3)(x) + 3^2 - 3^2 + 8$$

$$y = [x^2 + 2(3)(x) + 3^2] - 3^2 + 8$$

$$y = (x + 3)^2 - 9 + 8 \quad \text{เข้าสู่สูตร: } y = a(x - h)^2 + k$$

$$a = 1, h = -3, k = -1$$

x(h)	-1	-2	-3	-4	-5
y(k)	3	0	-1	0	3

ได้จุด  
ยอดจากสูตร

$$y = x^2 + 2(3)(x) + 3^2 - 3^2 + 8$$

ถ้าตามสูตรมี a มี b แล้ว แต่ b  
ถ้าตามโจทย์คือ 8 ซึ่ง b คือ 3  
แต่ 3 กำลังสองได้ 9 ไม่ใช่ 8  
เลยต้องทำแบบไฮโลก็เหลือ  
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$a = x, b = 3$$

ปล. ไม่รู้จะทำแบบนี้เรียกว่าไรแต่ว่ามันคือมี b แล้ว แต่ว่า b กำลังสองแล้วไม่ตรงเลยต้อง ตัดออกให้คงตัวเดิมไว้

ถ้าโจทย์เป็น  $y = x^2 - 4x + 9$

ให้ทำแบบนี้  $y = x^2 - 2(2)(x) + 2^2 - 2^2 + 9$

2 กำลังสองไม่ได้  
9 เลยต้องตัดออก

$$a = x, b = 2$$

$$y = (x - 2)^2 + 5$$

$$a = 1, h = 2, k = 5$$

x(h)	0	1	2	3	4
y(k)	9	6	5	6	9



$$y = a(x - h)^2 + k$$

h คือให้ทำเป็นเครื่องหมายตรงข้าม , ถ้าเป็น  $(x - 2)$  h คือ 2 , ถ้าเป็น  $(x + 2)$  h คือ -2

## กราฟค่าสัมบูรณ์

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$$

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

ให้ทำตารางแบบง่าย ๆ และแทนค่า x ๑

$$y = |(-2)| = 2, (-2, 2)$$

$$y = |(-1)| = 1, (-1, 1)$$

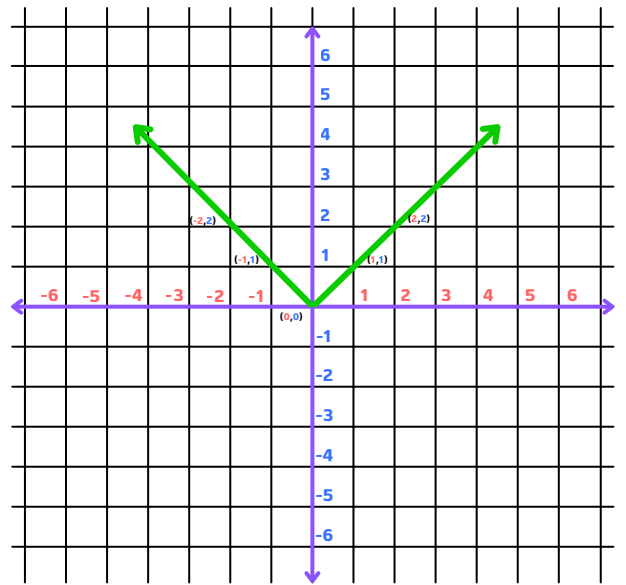
$$y = |(0)| = 0, (0, 0)$$

$$y = |(1)| = 1, (1, 1)$$

$$y = |(2)| = 2, (2, 2)$$

$$y = |x|$$

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$$



$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x| - 1\}$$

x	-2	-1	0	1	2
y	1	0	-1	0	1

ให้ทำตารางแบบง่าย ๆ และแทนค่า x ๑

$$y = |(-2)| - 1 = 1, (-2, 1)$$

$$y = |(-1)| - 1 = 0, (-1, 0)$$

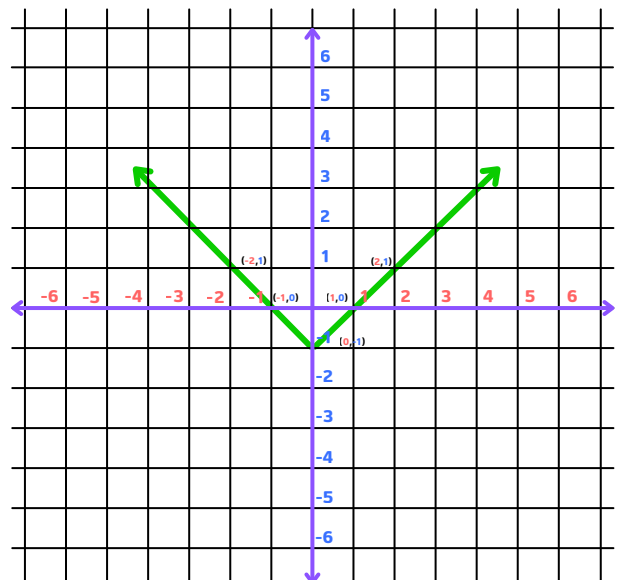
$$y = |(0)| - 1 = -1, (0, -1)$$

$$y = |(1)| - 1 = 0, (1, 0)$$

$$y = |(2)| - 1 = 1, (2, 1)$$

$$y = |x| - (\text{แทน } y)$$

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x| - 1\}$$

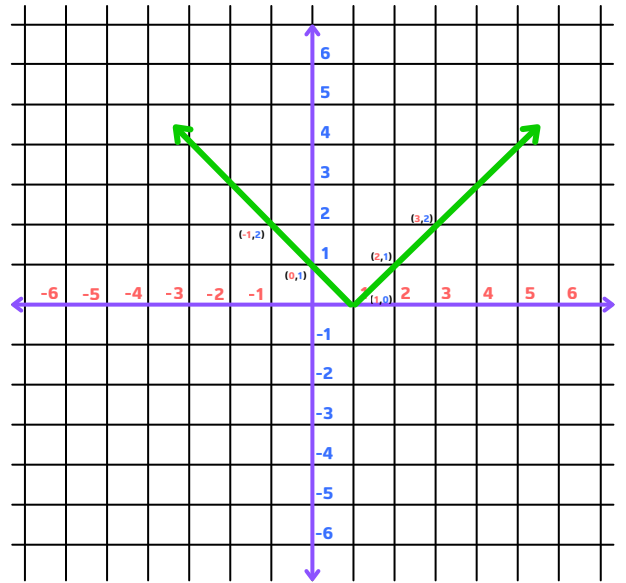


$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x - 1|\}$$

<b>x</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>y</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>

$$y = |x - (\text{แทน } x)|$$

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x - 1|\}$$



ให้ทำตารางแบบง่าย ๆ และ **แทนค่า x** ดู

$$y = |(-1) - 1| = 2, (-1, 2)$$

$$y = |(0) - 1| = 1, (0, 1)$$

$$y = |(1) - 1| = 0, (1, 0)$$

$$y = |(2) - 1| = 1, (2, 1)$$

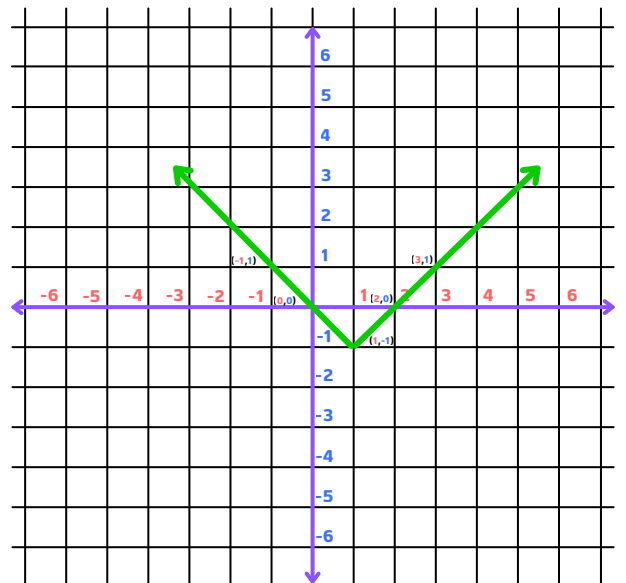
$$y = |(3) - 1| = 2, (3, 2)$$

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x - 1| - 1\}$$

<b>x</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>y</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>

$$y = |x - (\text{แทน } x)| - (\text{แทน } y)$$

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x - 1|\}$$



ให้ทำตารางแบบง่าย ๆ และ **แทนค่า x** ดู

$$y = |(-1) - 1| - 1 = 1, (-1, 1)$$

$$y = |(0) - 1| - 1 = 0, (0, 0)$$

$$y = |(1) - 1| - 1 = -1, (1, -1)$$

$$y = |(2) - 1| - 1 = 0, (2, 0)$$

$$y = |(3) - 1| - 1 = 1, (3, 1)$$

สูตรลัด

$$y = |x + 1|$$

ถ้าโจทย์มาทรงนี้ ปรับเครื่องหมายเป็นตรงข้ามได้เลยแล้วจะได้จุดยอด (**แทน x**)

ตามปกติ  $|x|$  ถอดมาแล้วจะได้ค่าเป็น **บวก**

เพิ่มหน้า 8 เอง  
ไปอ่านต่อๆ



# กราฟเส้นตรง

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x\}$$

<b>x</b>	-2	-1	0	1	2
<b>y</b>	-2	-1	0	1	2

ให้ทำตารางแบบง่าย ๆ และแทนค่า **x** ดู

$$y = (-2), (-2, -2)$$

$$y = (-1), (-1, -1)$$

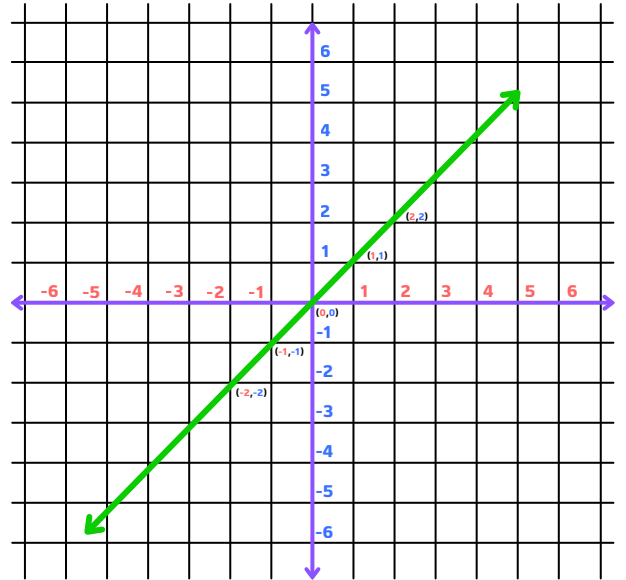
$$y = (0), (0, 0)$$

$$y = (1), (1, 1)$$

$$y = (2), (2, 2)$$

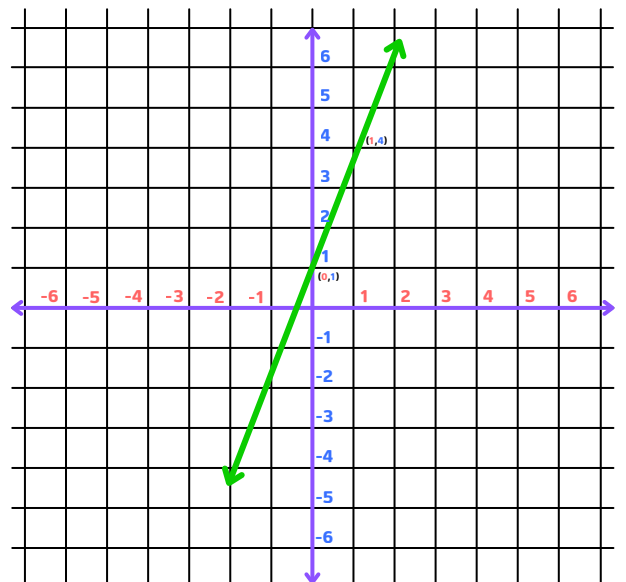
$$y = x$$

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x\}$$



$$y = mx + b$$

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x + 1\}$$



$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x + 1\}$$

จัดสมการให้อยู่ในรูป  $y = mx + b$

ให้มองว่า **m** คือค่าไคร้แล้วนับไปตาม  
นั้น เป็นบวกนับขึ้นและนับออกทางขวา  
อีก 1 , จะเริ่มนับจากจุด **b** (ค่า **y**)

กราฟเส้นตรงจัดยังไงก็ได้ให้อยู่ในรูป  $y = mx + b$

การนับคือให้จุดแรกอยู่ที่ตำแหน่ง **b** ในแกน **y**  
จุดสองให้นับ ขึ้นหรือลงตามบวกหรือลบ ในแกน **y** ตามค่า **m** แล้วขยับขวา 1 หน่วย

สมมุติว่า  $y = 5x + 9$  จุดแรกอยู่ที่ (0,9) จุดสองอยู่ที่ (1,14)

# กราฟอสมการ

โหล่งอะเนี่ยนไรตี  
นิกไม่ออก

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 2\}$$

ค่าตัวแดงเท่าไรสุดตรงนั้นจุดหนึ่ง  
ค่าตัวน้ำเงินเป็นอีกจุดหนึ่ง

กราฟนี้ไม่มีค่าแกน y ดูแค่แกน x

ขังแม่ง! ไปอ่านต่อไป

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 6\}$$

ค่าตัวแดงเท่าไรสุดตรงนั้นจุดหนึ่ง  
ค่าตัวน้ำเงินเป็นอีกจุดหนึ่ง

แต่ข้อนี้เส้นตรงจุด (6) ต้องเป็นเส้นประหรือจุด  
โปร่งเพราะเป็นเครื่องหมาย น้อยกว่า

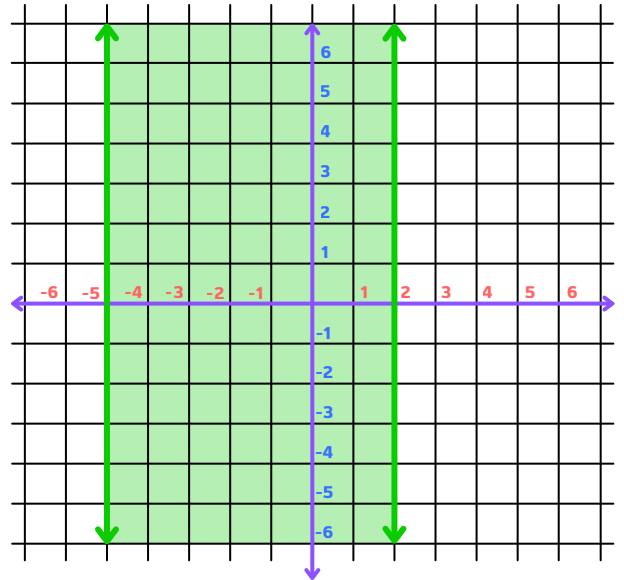


เครื่องหมายน้อยกว่า ให้เส้นเป็นเส้นประหรือจุดโปร่ง  
เครื่องหมายน้อยกว่าหรือเท่ากับ ให้เส้นเป็นเส้นทึบหรือจุดทึบ

กราฟอสมการ ไม่มีค่าแกน y (เป็น  $\infty$ ) มีแต่ค่าแกน x

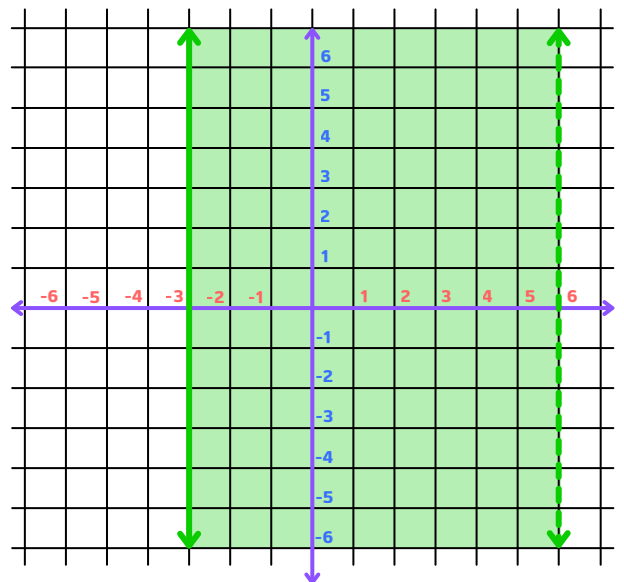
$$\mathbb{R} < x < \mathbb{R}$$

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 2\}$$



$$\mathbb{R} < x < \mathbb{R}$$

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 6\}$$



# Domain และ Range

Domain (Dr)

Range (Rr)

$$Dr = x$$

$$Rr = y$$

$$r = \{(1,-1), (2,-2), (3,-3), (4,-4), (5,-5), (6,-6)\}$$

$$Dr = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$Rr = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6\}$$

ตัวหน้าคือ Dr (x) , ตัวหลังคือ Rr (y)

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid 2x + 3y = 6\}$$

อันนี้  $\mathbb{R}$  นะ

หา Rr (y = ?)

$$2x + 3y = 6$$

$$3y = 6 - 2x$$

$$y = \frac{6 - 2x}{3} \quad \text{ตัวไรท์ตัดกัน}$$

$$y = 2 - \frac{2x}{3}$$

อันนี้คือ Rr (y)

$$\therefore Rr = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

หา Dr (x = ?)

$$2x + 3y = 6$$

$$2x = 6 - 3y$$

$$x = \frac{6 - 3y}{2} \quad \text{ตัวไรท์ตัดกัน}$$

$$x = 3 - \frac{3y}{2}$$

อันนี้คือ Dr (x)

$$\therefore Dr = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid 2x + 10y = 20\}$$

อันนี้  $\mathbb{R}$  นะ

หา Rr (y = ?)

$$2x + 10y = 20$$

$$10y = 20 - 2x$$

$$y = \frac{20 - 2x}{10} \quad \text{ตัวไรท์ตัดกัน}$$

$$y = 2 - \frac{2x}{10}$$

อันนี้คือ Rr (y)

$$\therefore Rr = \{\dots, -20, -10, 0, 10, 20, \dots\}$$

หา Dr (x = ?)

$$2x + 10y = 20$$

$$2x = 20 - 10y$$

$$x = \frac{20 - 10y}{2} \quad \text{ตัวไรท์ตัดกัน}$$

$$x = 10 - \frac{10y}{2}$$

อันนี้คือ Dr (x)

$$\therefore Dr = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid 4x - 5y = 20\}$$

อันนี้  $R \times R$  นะ

หา  $Rr$  ( $y = ?$ )

$$4x - 5y = 20$$

$$-5y = 20 - 4x$$

$$y = \frac{20 - 4x}{-5} \quad \text{ตัวโหวโลกัดตัดกัน}$$

$$y = -4 - \frac{2x}{-5}$$

อันนี้คือ  $Rr$  ( $y$ )

$$\therefore Rr = R$$

หา  $Dr$  ( $x = ?$ )

$$4x - 5y = 20$$

$$4x = 20 + 5y$$

$$x = \frac{20 + 5y}{4} \quad \text{ตัวโหวโลกัดตัดกัน}$$

$$x = 5 + \frac{5y}{4}$$

อันนี้คือ  $Dr$  ( $x$ )

$$\therefore Dr = R$$

$R \times R$  ใช้สูตรแบบเดียวกันแต่ว่าคำตอบ  $Dr = R$ ,  $Rr = R$

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \frac{2x + 1}{3x - 2}\} \quad \text{ส่วนไม่เท่ากับ 0}$$

หา  $Rr$  ( $y = ?$ )

$$y = \frac{2x + 1}{3x - 2} \quad \text{จัดสมการใหม่ย้ายส่วนไปคูณ}$$

$$y(3x - 2) = 2x + 1$$

$$3xy - 2y = 2x + 1$$

$$3xy - 2x = 1 + 2y \quad \text{ย้ายข้างสมการ}$$

$$x(3y - 2) = 1 + 2y \quad \text{ดึงตัวร่วม}$$

$$x = \frac{1 + 2y}{3y - 2} \quad \text{ย้ายข้างสมการ}$$

$$x = \frac{1 + 2y}{3y - 2} \quad \text{จัดส่วนให้ไม่เท่ากับ 0}$$

$$3y - 2 \neq 0$$

$$3y \neq 2$$

$$y \neq \frac{2}{3}$$

$$\therefore Rr = R - \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

หา  $Dr$  ( $x = ?$ )

$$y = \frac{2x + 1}{3x - 2} \quad \text{จัดส่วนให้ไม่เท่ากับ 0}$$

$$3x - 2 \neq 0$$

$$3x \neq 2$$

$$x \neq \frac{2}{3}$$

$$\therefore Dr = R - \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

เป็น  $R - \left\{\frac{2}{3}\right\}$  เพราะ  $x \neq \frac{2}{3}$

ก็คือเอาทุกตัวยกเว้น  $\frac{2}{3}$

ดูให้ดีว่าเป็น  $R \times R$  หรือ  $|x|$

อ่านไรเหย  
ไปอ่านคณิตต่อตัวนะ

$$A = \{5,6,7,8,9\}, r = \{(x,y) \in A \times A \mid y = 2x - 5\}$$

หา  $D_r(x)$

$$5 = 2x - 5 = 5$$

$$7 = 2x - 5 = 6$$

$$9 = 2x - 5 = 7$$

$$\therefore D_r = \{5,6,7\}$$

แทนค่า  $y$

หา  $R_r(y)$

$$y = 2(5) - 5 = 5$$

$$y = 2(6) - 5 = 7$$

$$y = 2(7) - 5 = 9$$

$$y = 2(8) - 5 = 11$$

ไม่มีในเซต A (เกิน)

$$\therefore R_r = \{5,7,9\}$$

แทนค่า  $x$  จากเลขในเซต A

หาค่า  $y$  ก่อนแล้วค่อยหาค่า  $x$

$$r = \{(x,y) \mid y = |x| + 3\}$$

หา  $D_r(x)$

$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	5	4	3	4	5

$$\therefore D_r = R$$

เป็นจำนวนจริง (R)

หา  $R_r(y)$

$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	5	4	3	4	5

$$\therefore R_r = [3, \infty]$$

เป็น  $\infty$  ไปเรื่อยๆ , ต่ำสุดที่ 3 จนถึง  $\infty$

อย่าเพิ่งหัว  
ระเบิดนะ

สู้ๆ ก่อนทุกคน  
ทำได้แน่นอนเว้ย  
ต้องใจตัวต่อไป!

$$\text{ถ้า } y = 2x - 1 \text{ เมื่อ } -1 \leq x \leq 3$$

ถ้าเจอทำกราฟสองแบบ  
ให้แยกประเภทก่อน

กราฟอสมการ  $x = -1, 3$

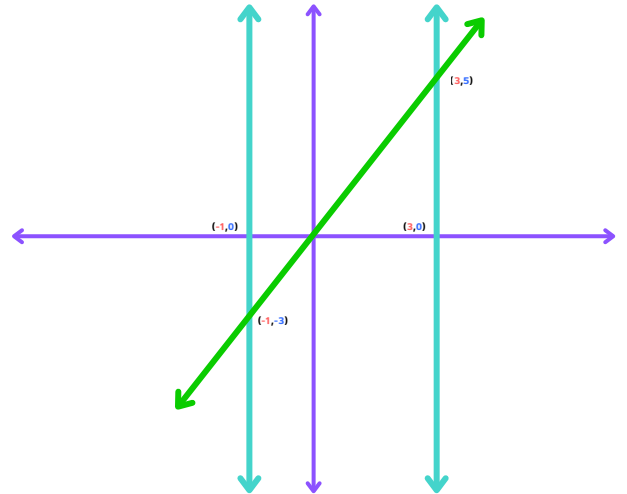
กราฟเส้นตรงให้แทนค่า  $x$

$$x = -1, y = 2(-1) - 1 = \underline{-3}$$

$$\therefore y = \underline{-3}$$

$$x = 3, y = 2(3) - 1 = \underline{5}$$

$$\therefore y = \underline{5}$$



$$\text{ถ้า } y = x^2 \text{ เมื่อ } -4 \leq x \leq 4$$

ถ้าเจอทำกราฟสองแบบ  
ให้แยกประเภทก่อน

กราฟอสมการ  $x = -4, 4$

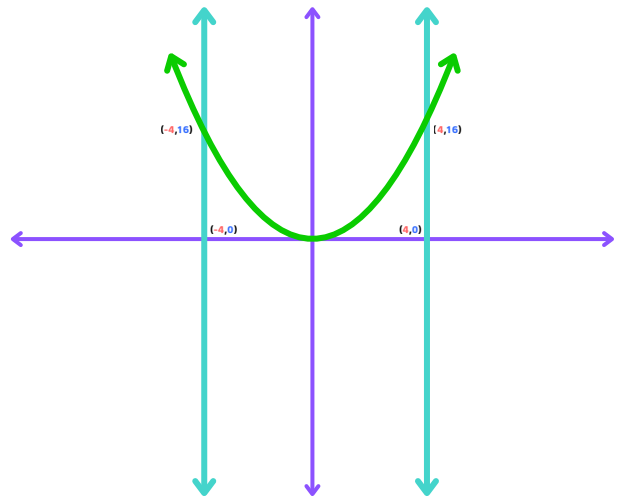
กราฟพาราโบลาให้แทนค่า  $x$

$$x = -4, y = (-4)^2 = 16$$

$$\therefore y = \underline{16}$$

$$x = 4, y = (4)^2 = 16$$

$$\therefore y = \underline{16}$$



$$\text{ถ้า } y = |x| \text{ เมื่อ } -4 \leq x \leq 4$$

ถ้าเจอทำกราฟสองแบบ  
ให้แยกประเภทก่อน

กราฟอสมการ  $x = -4, 4$

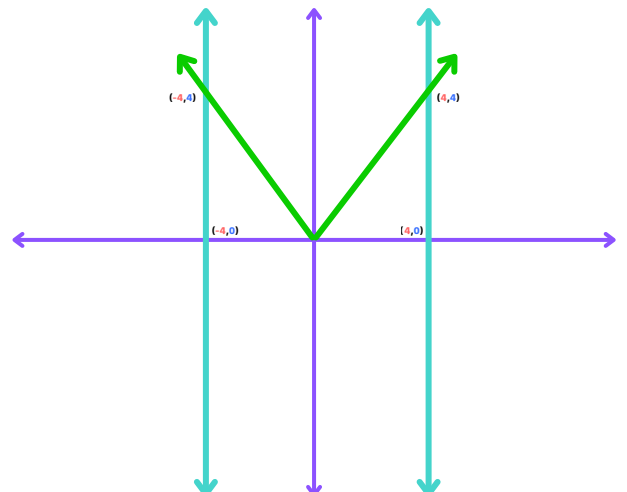
กราฟค่าสัมบูรณ์ให้แทนค่า  $x$

$$x = -4, y = |-4| = 4$$

$$\therefore y = \underline{4}$$

$$x = 4, y = |4| = 4$$

$$\therefore y = \underline{4}$$



ถ้าเจอให้หา  $D_r$ ,  $R_r$  ในกราฟค่าสัมบูรณ์

$$D_r = \mathbb{R}$$

$$R_r = [0, \infty)$$

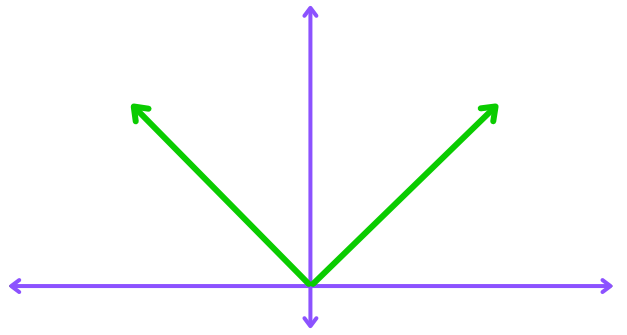
↑ อ่านว่า

เปิด 0 เปิด  $\infty$

อ่านว่า **เปิด**(เครื่องหมาย  $[]$ )  
**เปิด**(เครื่องหมาย  $()$ )

$$y = |x|$$

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$$



ถ้าเจอให้หา  $D_r$ ,  $R_r$  ในกราฟค่าสัมบูรณ์

$$D_r = \mathbb{R}$$

$$R_r = [0, \infty)$$

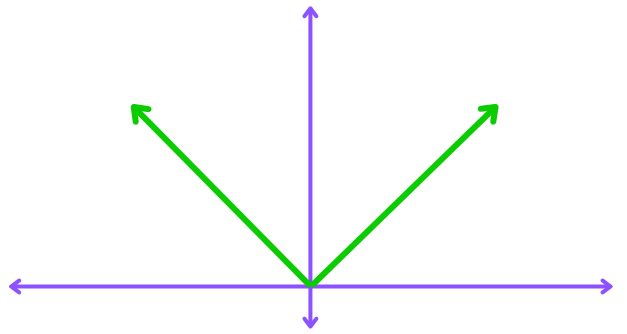
↑ อ่านว่า

เปิด 0 เปิด  $\infty$

อ่านว่า **เปิด**(เครื่องหมาย  $[]$ )  
**เปิด**(เครื่องหมาย  $()$ )

$$y = |x|$$

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x|\}$$



## สมการกราฟวงกลม

ในสมการกราฟวงกลม

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 6^2\}$$

ตัวที่ไฮไลท์คือตัวที่จะบอกจุดตั้งใน **ค่าบวก** และ **ลบ** ของ **ทั้งสองแกน**

$$D_r = [-6, 6]$$

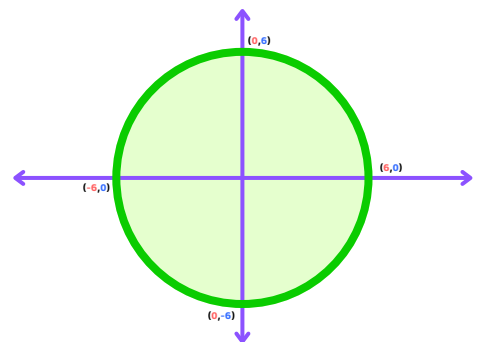
$$R_r = [-6, 6]$$

ยังงี้ก็ได้ต้องจัดสมการให้ในรูป

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

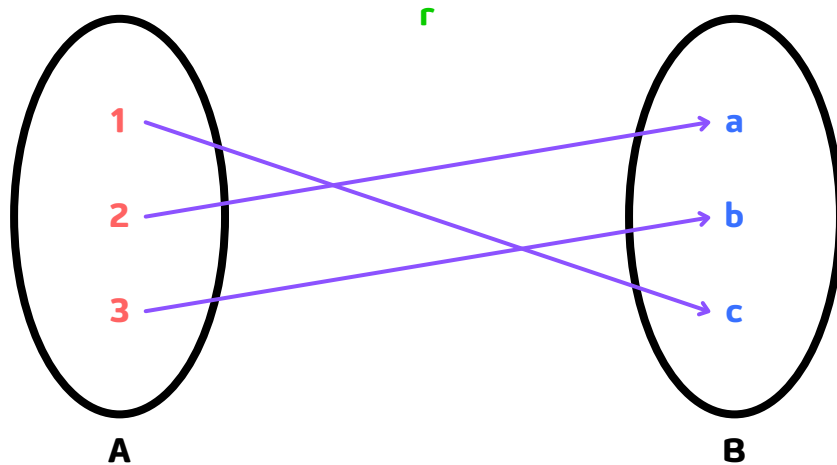
$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 6^2\}$$



$r =$  รัศมี

ถ้าสมการมาจาก  $y = \sqrt{r - x^2}$  ให้กำลังสองทั้งสมการและจะได้กราฟครึ่งวงกลม

# FUNCTION



Function จะต้อง**มี x หนึ่งค่า**ต่อ **y หนึ่งค่า** **ไม่มีซ้ำ**

$$r = \{(1,c), (2,a), (3,b)\}$$

$$f(x) = y$$

ตัวอย่าง :  $r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = 3x\}$

$x$	1	2	3	4	5
$f(x) = y$	3	6	9	12	15

ตัวอย่าง :  $f(x) = 3x + 2$  โดยที่  $x$  เป็นจำนวนใดๆ

$$f(2) = 3(2) + 2 = 8$$

$$f(-5) = 3(-5) + 2 = -13$$

ให้แทนค่า  $x$  ลงไปในสมการ

$$f(a) = 3(a) + 2 = 3a + 2$$

$$f(b-2) = 3(b-2) + 2 = 3b - 4$$

แทนค่าด้วยตัวแปรได้



ให้  $f(x) = mx + c$  โดยที่  $f(1) = 5$  และ  $f(5) = -4$

หาค่า  $m$  และ  $c$

$$5 = m(1) + c$$

$$5 = m + c \quad \text{①}$$

$$-4 = m(5) + c$$

$$-4 = 5m + c \quad \text{②}$$

$$\text{②} - \text{①} ; -4 = 5m + c$$

$$5 = m + c$$

$$-9 = -4m$$

$$4m = -9$$

$$m = \frac{-9}{4}$$

แทนค่า  $m$  ไปในสมการที่ 1

$$5 = \frac{-9}{4} + c$$

$$5 + \frac{9}{4} = c$$

$$5 \times \left(\frac{4}{4}\right) + \frac{9}{4} = c$$

$$\frac{29}{4} = c$$

หาค่า  $f(3)$  x  $f(-4)$

แทนค่า  $m, c$  ในสมการได้เลย

$$f(x) = \frac{-9}{4}x + \frac{29}{4}$$

กรณี  $f(3)$

$$f(3) = \frac{-9}{4}(3) + \frac{29}{4}$$

$$f(3) = \frac{2}{4}$$

$$f(3) = \frac{1}{2}$$

กรณี  $f(-4)$

$$f(-4) = \frac{-9}{4}(-4) + \frac{29}{4}$$

$$f(-4) = \frac{65}{4}$$

$$f(3) \times f(-4) = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{65}{4}\right)$$

$$f(3) \times f(-4) = \frac{65}{8}$$

$$f(x) = \frac{12}{ax + b}, x \in R$$

ถ้า  $f(1) = 24$  และ  $f(-1) = -8$

หาค่า  $a$  และ  $b$

$$24 = \frac{12}{a(1) + b}$$

$$24(a + b) = 12$$

$$2(a + b) = 1$$

$$2a + 2b = 1 \quad \text{①}$$

$$-8 = \frac{12}{a(-1) + b}$$

$$-8(-a + b) = 12$$

$$-2(-a + b) = 3$$

$$2a - 2b = 3 \quad \text{②}$$

$$\text{②} + \text{①} ; 2a + 2b = 1 + 2a - 2b = 3$$

$$4a = 4$$

$$a = \frac{4}{4}$$

$$a = 1$$

แทน  $a = 1$  ในสมการที่ 1

$$2(1) + 2b = 1$$

$$2b = -1$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

หาค่า  $x$  ที่ทำให้  $f(x) = 4$

$$f(x) = \frac{12}{ax + b}$$

$$f(x) = \frac{12}{(1)x + (-\frac{1}{2})}$$

$$4 = \frac{12}{x - \frac{1}{2}}$$

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right) = 12$$

$$4x - 2 = 12$$

$$x = \frac{14}{4}$$

$$x = \frac{7}{2}$$

$$\therefore a = 1, b = -\frac{1}{2}, x = \frac{7}{2}$$

ถ้าเจอให้หาค่า  $a, b$  ผ่านสมการให้จัดให้เป็นสมการที่ 1 และ 2

ถ้าเจอให้หาค่า  $f(x)$  ก็ให้แทนค่า  $a, b$  ได้เลย

$$f(x) = x; -1 \leq x \leq 1$$

หา  $Dr(x)$

$$\therefore Dr = Rr$$

หา  $Rr(y)$

$$x = -1, y = -1$$

$$x = 1, y = 1$$

$$\therefore Rr = [-1, 1]$$

$$f(x) = 2x - 3; -1 \leq x \leq 3$$

หา  $Dr(x)$

$$\therefore Dr = [-1, 3]$$

หา  $Rr(y)$

$$x = -1; y = 2(-1) - 3 = -5$$

$$x = 3; y = 2(3) - 3 = 3$$

$$\therefore Rr = [-5, 3]$$

$$f(x) = x - 2; x \geq 1$$

หา  $Dr(x)$

$$\therefore Dr = [1, \infty)$$

$x$  มากกว่า 1 เลยเอาตั้งแต่ 1 จนถึง  $\infty$

หา  $Rr(y)$

$$x = 1; y = (1) - 2 = -1$$

$$\therefore Rr = [-1, \infty)$$

หาค่า  $y$  ได้ -1 ไปจนถึง  $\infty$

$$f(x) = -4x + 5; x < 2$$

หา  $Dr(x)$

$$\therefore Dr = (-\infty, 2)$$

$x$  น้อยกว่า 2 เลยเอาตั้งแต่  $\infty$  ฝั่งค่าลบ  $(-\infty)$  ไปจนถึง 2

หา  $Rr(y)$

$$x = 2; y = -4(2) + 5 = -3$$

$$\therefore Rr = (-3, \infty)$$

สูตร

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = Dr = R - \left\{ \frac{-d}{c} \right\}, Rr = R - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

รู้เนะเห็นละท้อ  
แต่อย่ายอมแพ้ทีละ

$$f(x) = \frac{6x + 7}{2x + 3}$$

**หา Dr (x)**

$$Dr = R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

$$\therefore Dr = R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

**หา Rr (y)**

$$Rr = R - \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

$$Rr = R - \left\{\frac{6}{2}\right\}$$

$$\therefore Rr = R - \{3\}$$

$$f(x) = \frac{8x + 4}{7x - 5}$$

**หา Dr (x)**

$$Dr = R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

$$Dr = R - \left\{-\frac{(-5)}{7}\right\}$$

$$\therefore Dr = R - \left\{\frac{5}{7}\right\}$$

**หา Rr (y)**

$$Rr = R - \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

$$\therefore Rr = R - \left\{\frac{8}{7}\right\}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \quad \text{ตัวส่วนต้องไม่เท่ากับ 0}$$

**หา Dr (x)**

$$x^2 - 1 \neq 0$$

$$x^2 \neq 1$$

$$\sqrt{x^2} \neq \sqrt{1}$$

$$x \neq \pm 1$$

$$\therefore Dr = R - \{-1, 1\}$$

**หา Rr (y)**

$$y(x^2 - 1) = x$$

$$yx^2 - y = x$$

$$yx^2 - x - y = 0$$

**กรณี y = 0**

$$(0)x^2 - (0) - x = 0$$

$$0 = x$$

**กรณี y ≠ 0**

$$\text{ใช้สูตร: } ax^2 + bx + c, \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = y, b = -1, c = -y$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(y)(-y)}}{2(y)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4y^2}}{2y}$$

$$\therefore Rr = R$$

$$Rr \text{ เป็น } R \text{ เพราะ } 1 + 4y^2 > 0$$

ต้องเป็นกรณี y ≠ 0

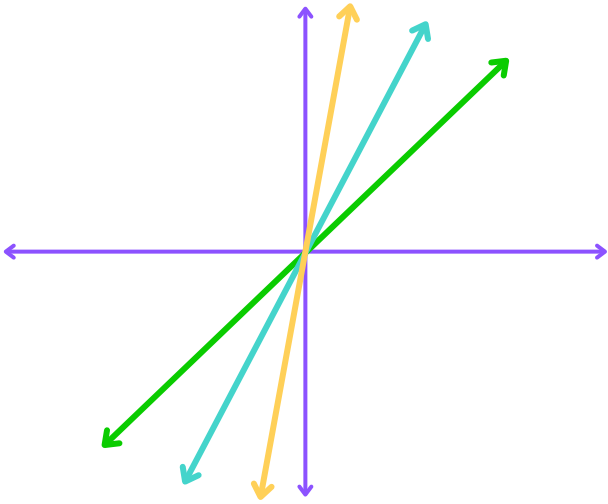
嘿ๆ มึงเห็นนั่นปะ  
นี่สอบคณิตอะ  
กูรู มึงทำได้เว้ย

# สูตร

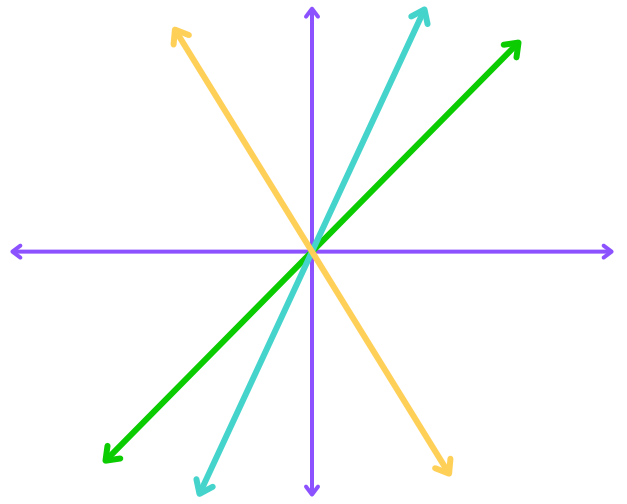
$$ax^2 + bx + c, \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## LINEAR FUNCTION

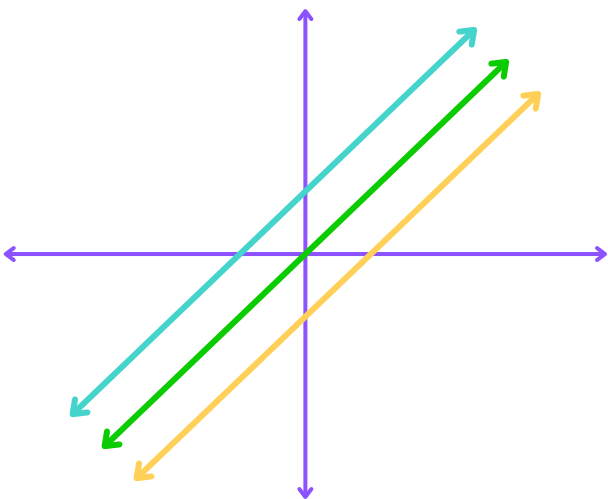
$$y_1 = x, \quad y_2 = 3x, \quad y_3 = 6x$$



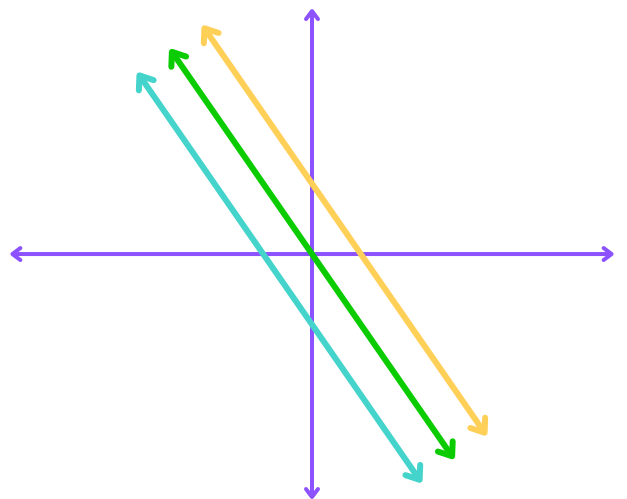
$$y_1 = x, \quad y_2 = 3x, \quad y_3 = -3x$$



$$y_1 = x, \quad y_2 = x - 1, \quad y_3 = x + 1$$



$$y_1 = -3x, \quad y_2 = -3x - 1, \quad y_3 = -3x + 1$$



ถ้าเจอโจทย์แนวๆ ว่า  $(x,y)$  นี้อยู่ในกราฟมั๊ยจากสมการ เช่น

คู่อันดับนี้อยู่บนแกนหรือไม่  $(2,1)$  ในสมการ  $2x - 3y = 6$

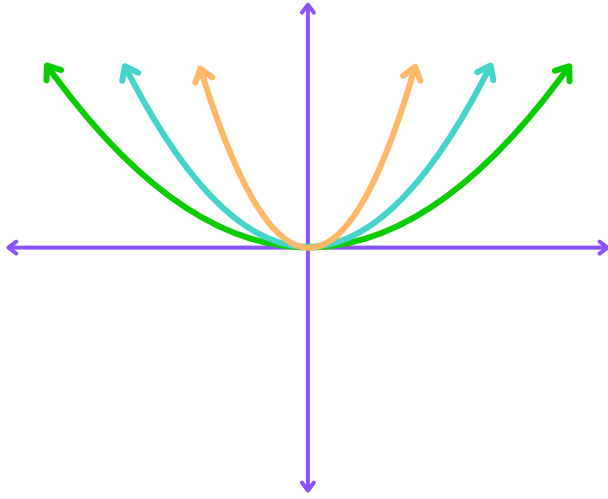
หาค่า  $x$  แทนค่า  $y = 0$ ;  $2x - 3(0) = 6$ ; จุดตัดแกน  $x$  คือ  $(3,0)$

หาค่า  $y$  แทนค่า  $x = 0$ ;  $2(0) - 3y = 6$ ; จุดตัดแกน  $y$  คือ  $(0,-2)$

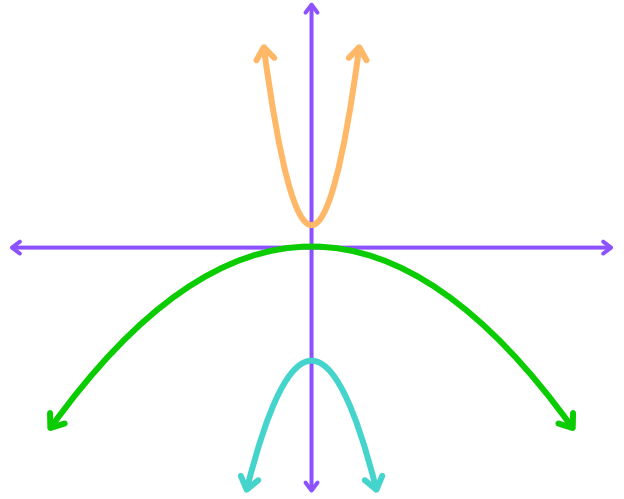
$\therefore (2,1)$  ไม่อยู่บนแกน, จุดที่อยู่บนแกนคือ  $(3,0)$  และ  $(0,-2)$

# QUADRATIC FUNCTION

$$y_1 = 2x^2, \quad y_2 = 4x^2, \quad y_3 = 6x^2$$



$$y_1 = -2x^2, \quad y_2 = -4x^2 - 4, \quad y_3 = 8x + 3$$



ถ้าเจอโจทย์สมการพาราโบลาให้หันทิศจุดให้ได้และต้องแก้สมการตามสูตร  
อย่าลืมว่า  $(x,y) = (h,k)$

สมมติว่าเจอโจทย์  $4(x-1)^2 - 1 = 0$  ก็จะตรงกับสูตร  $a(x-h)^2 + k$

จะได้คำตอบว่า สมการนี้เป็นกราฟหงายที่จุดต่ำสุดคือ  $(1,-1)$

สมมติว่าเจอโจทย์  $x^2 - 10x + 25 = 0$  ก็จะตรงกับสูตร  $ax^2 + bx + c, \frac{-b}{2a}$

$$\frac{-(-10)}{2(1)} = 5$$

จะได้คำตอบว่า สมการนี้เป็นกราฟหงายที่จุดต่ำสุดคือ  $(5,0)$

ถ้าต้องหา  $Dr$  และ  $Rr$

$$y = x^2 - 8x + 54$$

หา  $Dr(x)$

$$\therefore Dr = R$$

จะจบละนิดเดียว  
ใจเย็นๆ นะ

หา  $Rr(y)$

แก้สมการหาค่า  $x$  ก่อน

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2(1)}$$

$$x = 4$$

แทนค่า  $x$  ในสมการ

$$y = 4^2 - 8(4) + 54$$

$$y = 16 - 32 + 54$$

$$y = 38$$

$$\therefore Rr = [38, \infty)$$

ถ้าต้องการ **Dr** และ **Rr** และต้องจัดสมการด้วย

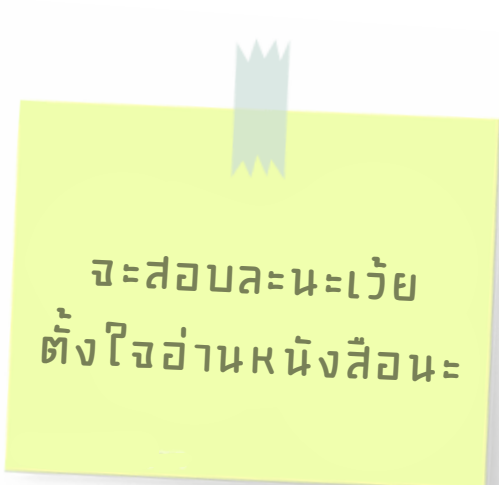
$$y = (x + 2)(x + 3) \text{ จัดสมการให้เป็น } y = ax^2 + bx + c$$

$$y = x^2 + 5x + 6$$

(มาจาก การคูณ AA AB BA BB)

หา **Dr (x)**

$$\therefore Dr = R$$



หา **Rr (y)**

แก้สมการหาค่า x ก่อน

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2(1)}$$

$$x = \frac{-5}{2}$$

แทนค่า x ในสมการ

$$y = \left(\frac{-5}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{-5}{2}\right) + 6$$

$$y = \frac{25}{4} - \frac{25}{2}\left(\frac{2}{2}\right) + 6\left(\frac{4}{4}\right)$$

$$y = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{24}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore Rr = \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$$

## MATH PROBLEMS

เตวาทะบอลขึ้นไปในแนวตั้ง ความสูงหน่วยเป็นฟุต ลูกบอลที่ถูกเตะขึ้นไปคำนวณได้จากสูตร

$$f(x) = 27x - 6x^2 \quad x \text{ แทนเวลาหน่วยวินาที(s)}$$

จงเขียนกราฟเมื่อ  $0 \leq x \leq 4.5$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-27}{2(-6)}$$

$$x = \frac{-27}{-12}$$

$$x = \frac{9}{4} = 2.25s$$

แทนค่า x ในสมการ

$$f(x) = 27\left(\frac{9}{4}\right) - 6\left(\frac{9}{4}\right)^2$$

$$f(x) = \frac{243}{4} - \frac{486}{16}$$

$$f(x) = \frac{972}{16} - \frac{486}{16} = 30.375'$$

ลูกบอลอยู่ที่จุดสูงสุดตอนไหน

$$x = 2.25s$$

ลูกบอลใช้เวลานานเท่าไรถึงจะตกลงพื้น

$$f(x) = 0$$

$$0 = 27x - 6x^2$$

$$0 = x(27 - 6x)$$

จัดใหม่

$$27 - 6x = 0$$

$$27 = 6x$$

$$\frac{27}{6} = x$$

$$x = 4.5s$$



โยนหินขึ้นไปในแนวตั้ง ความสูงหน่วยเป็นฟุต ลูกบอลที่ถูกเตะขึ้นไปคำนวณได้จากสูตร

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3 \quad x \text{ แทนเวลาหน่วยวินาที(s)}$$

ก่อนหินอยู่ที่จุดสูงสุดตอนไหน

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-2}{-2}$$

$$x = 1 \text{ s}$$



ที่จุดสูงสุดก่อนหินอยู่ที่ความสูงเท่าไร

แทน  $x$  เป็น 1

$$\begin{aligned} f(x); f(1) &= -(1)^2 + 2(1) + 3 \\ &= -1 + 2 + 3 \\ &= 4' \end{aligned}$$

ก่อนหินใช้เวลานานเท่าไรที่จะตกลงพื้น

$$f(x) = 0$$

คูณ -1 ทั้งสมการเพื่อให้ตัวหน้าติดลบ

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$(x - 3) = 0$$

$$x = 3$$

$$(x + 1) = 0$$

$$x = -1$$

เวลาติดลบไม่ได้

∴ ก่อนหินจะใช้เวลา 3 วินาทีจึงจะตกลงพื้น

∴ ก่อนหินจะอยู่ที่จุดสูงสุดตอน 1 วิที่ความสูง 4'

บริษัทผลิตของเล่นมีต้นทุนการผลิต  $x$  ชิ้นเท่ากับ  $\frac{1}{2}x^2 - 30x - 100$  บาท

โดยจะขายชิ้นละ 170 บาท ถ้าต้องการให้ได้กำไรสูงสุดต้องขายทั้งหมดกี่ชิ้น

กำไร = ราคาขาย - ต้นทุน

$$f(x) = 170x - \left(\frac{1}{2}x^2 - 30x - 100\right)$$

$$f(x) = 170x - \frac{1}{2}x^2 + 30x + 100$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 200x + 100$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = 200, c = 100$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-200}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$x = \frac{-200}{-1} = 200$$

∴ จะต้องขายของ 200 ชิ้น



ป่าสมรถราคา 2,000,000 บาท เมื่อใช้งานไป 8 ปี รถจะมีราคา 1,450,000 บาท  
จงเขียน  $f(x)$  เมื่อเวลาผ่านไป  $x$  ปี

$$f(x) = x \frac{(2,000,000 - 1,450,000)}{8}$$

$$f(x) = x \frac{(550,000)}{8}$$

$$f(x) = x(68,750)$$

ตอนสอบทำให้ได้คะแนน  
บังคับเลย

# EXPONENTIAL

$$y = 2^x$$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

ถ้า  $0 < a < 1$  ฟังก์ชันลด

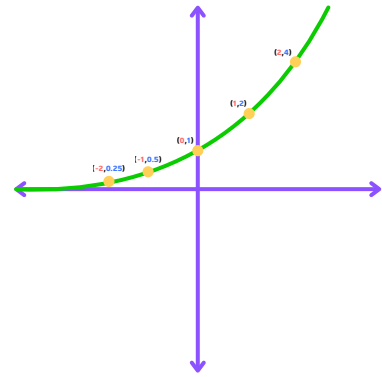
$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

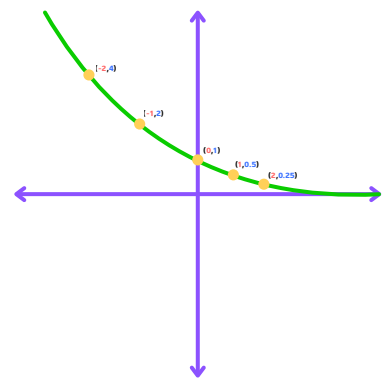
ถ้า  $a > 1$  ฟังก์ชันเพิ่ม

ยิ่ง a มีค่ามาก กราฟจะยิ่งแคบ

$$y = a^x$$



$$y = a^x$$



## การแก้สมการ Exponential

จัดให้อยู่ในฐานเดียวกัน  $a^x = a^y$  จะได้  $x = y$

$$3^x = 243$$

$$3^x = 3^5$$

$$x = 5$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^x = 2,401$$

$$7^{-x} = 2,401$$

$$7^{-x} = 7^4$$

$$-x = 4$$

$$x = 4$$

$$2^{x-1} = 256$$

$$2^{x-1} = 2^8$$

$$x - 1 = 8$$

$$x = 9$$

$$3(5)^x = 1,875$$

$$5^x = \frac{1875}{3}$$

$$5^x = 625$$

$$5^x = 5^4$$

$$x = 4$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1} = \left(\frac{81}{16}\right)^x$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{-x+1} = \left(\frac{9}{4}\right)^{2x}$$

$$-x + 1 = 2x$$

$$1 = 3x$$

$$\frac{1}{3} = x$$

คลิปการสอน (ใน Youtube) คร่าวๆ ไปดูได้ สอนเข้าใจ



**Exponential**  
คลิปสอน



**Parabola**  
คลิปสอน



**Absolute**  
คลิปสอน



**Function**  
คลิปสอน



**Linear**  
คลิปสอน

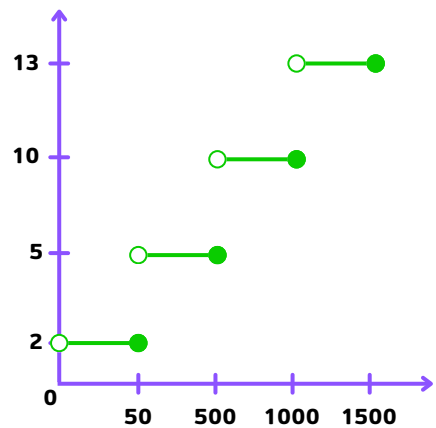


**Inequality**  
คลิปสอน



# STEP - CHART

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x \leq 50 \\ 5, & 50 < x \leq 500 \\ 10, & 500 < x \leq 1000 \\ 13, & 1000 < x \leq 1500 \end{cases}$$



ถ้าอ่านในหนังสือจะเป็นหน้า 50 - 82 นะจ้ะ

ไม่เห็นยากเลย  
ทำให้ได้ดีจ้ะ!